

BIOMECHANIKA

Cvičení č. 3

**Moment setrvačnosti
a úhlová rychlost při veletoci**

JAN ŠVEC

**Katedra experimentální fyziky, Př.F.,
Univerzita Palackého v Olomouci**

Úloha pro cvičení:
Jakou úhlovou rychlost nabere
gymnasta při veletochi?

Rozbor:

Předpokládejme, že se gymnasta spustí dolů ze „stojky“

Potenciální energie E_p se tak v nejnižším bodě pod hrazdou plně přemění na energii otáčivou E_ω .
(zanedbáme ztráty třením)

Potenciální energie: $E_p = mgh$

Kinetická energie: $E_\omega = J \omega^2 / 2$

$$E_p = mgh = J \omega^2 / 2 = E_\omega$$

$$\text{Tedy: } \omega^2 = 2 mgh / J$$

Pro určení ω potřebujeme tedy znát, kromě gravitačního zrychlení g , hmotnost m , vzdálenost h a moment setrvačnosti J

Vzdálenost h :

Výška h odpovídá rozdílu poloh těžiště gymnasty v nejvyšší a nejnižší poloze.

**Pokud je vzdálenost těžiště od hrazdy r_T ,
pak $h = 2r_T$**

Výpočet r_T byl v minulé úloze.

$$\text{Tedy } \omega^2 = 2 mgh/J = 4mgr_T/J$$

Moment setrvačnosti J:

Pro moment setrvačnosti tělesa o hmotnosti m , jehož těžiště je ve vzdálenosti r_T od osy otáčení platí

Steinerova věta:

$$\mathbf{J = J_0 + m r_T^2 \text{ [kg m}^2\text{]}}$$

J_0 je moment setrvačnosti při ose otáčení v těžišti.

Moment setrvačnosti J:

U gymnasty je třeba celkový moment setrvačnosti J určit ze součtu momentů setrvačnosti všech 14 segmentů:

$$J = (J_{01} + m_1 r_1^2) + (J_{02} + m_2 r_2^2) + \dots + (J_{014} + m_{14} r_{14}^2),$$

kde r_1 až r_{14} jsou vzdálenosti těžišť jednotlivých segmentů od hrazdy (počítány v minulé úloze).

Momenty setrvačnosti jednotlivých segmentů J_{0i} lze určit opět z tabulkových koeficientů zjištěných Zaciorským a Selujanovem (1979).

Pro zjištění těchto koeficientů a pro výpočty momentů setrvačnosti segmentů použijte výpočtovou tabulku v Excelu z výukového příkladu na adrese:

http://biomech.ftvs.cuni.cz/pbpk/kompendium/biomechanika/geometrie_moment_vypocet.php

Momenty setrvačnosti lidského těla a jeho segmentů

Momenty setrvačnosti J_0 segmentů lidského těla byly zjišťovány experimentálně Zaciorským a Selujanovem (1979) vzhledem k osám kolmým na rovinu

- frontální (např. provádění veletoce) a
- sagitální (např. provádění vrutů).

Lze je vyjádřit na základě rovnice $J_0 = B_0 + B_1 m + B_2 v$, (pro každý segment), $[kg.m^2]$,

kde m (kg) je celková hmotnost
a v (cm!) je výška pokusné osoby.

Výpočet momentů setrvačnosti segmentů těla dle Zaciorského a Selujanova, 1979

frontální rovina

segment	$B_0 [kg.cm^2]$	$B_1 [kg.cm^2]$	$B_2 [kg.cm]$
noha	-100	0,48	0,626
bérec	-1105	4,59	6,63
stehno	-3557	31,7	18,61
ruka	-19,5	0,17	0,116
předloktí	-64	0,95	0,34
nadloktí	-250,7	1,56	1,512
hlava	78	1,171	1,519
vrchní část trupu	81,2	36,73	-5,97
střední část trupu	18,5	39,8	-12,87
spodní část trupu	1568	12	7,741

$$J_0 = B_0 + B_1 m + B_2 v \quad (kg.cm^2)$$

kde m (kg) je celková hmotnost
a v (cm!) je výška pokusné osoby.

Všechny výše uvedené koeficienty byly stanoveny experimentálně, mají stochastický charakter a jejich použití na „průměrnou“ populaci je tedy provedeno s jistou pravděpodobností a zatíženo určitou chybou měření.

Pro zjištění celkového momentu setrvačnosti člověka je nutno použít Steinerovu větu pro soustavu hmotných segmentů, tj, platí rovnice:

$$J = \sum_1^n J_{0i} + \sum_1^n m_i d_i^2, [kg.m^2]$$

kde d_i [m] je vzdálenost těžiště segmentu i kolmo od osy otáčení

Tabulka T1.2:

<http://biomech.ftvs.cuni.cz/pbpbk/kompendium/biomechanika/images/2Tlmom.gif>

Konečný výpočet úhlové rychlosti:

Z vypočtených hodnot r_T a J a známých hodnot hmotnosti m a gravitačního zrychlení g (9,81 m/s²) vypočítáme

$$\omega^2 = 4 m g r_T / J \quad [(\text{rad/s})^2]$$

$$\omega = \text{sqrt}(\omega^2) \quad [\text{rad/s}]$$

Pro diskusi:

Jak moc se liší vámi vypočtená hodnota úhlové rychlosti ω od původní odhadované 2π [rad/s]? A jaký je to rozdíl v otočkách za sekundu?

Jak, a o kolik newtonů, se změní vypočtená síla, kterou se musí gymnasta držet hrazdy aby nespadl, když se použije vámi nově vypočtená hodnota ω ?

Aby zvýšil úhlovou rychlost a tak překonal tření a dostal se opět do stoje na rukou na vrcholu hrazdy, co může gymnasta udělat?